

Επώνυμο: _____

Όνομα: _____

Τμήμα: _____

Ημερομηνία: 23.03.2024

Θέμα Α

- A1.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι κυρτή και πότε κοίλη σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; 4 μονάδες
- A2.** Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. 4 μονάδες
- A3.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και G παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$ 7 μονάδες
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ εκφράζει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ C_f , x και των ευθειών $x = \alpha$ και $x = \beta$. Σ Λ
- ii) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ αλλά η f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$. Σ Λ
- iii) Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σ'ένα διάστημα Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Σ Λ
- iv) Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και f δυο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f''(x_0) = 0$. Σ Λ
- v) Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ τότε
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g'(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_{\alpha}^{\beta}$$
 Σ Λ
- 10 μονάδες**

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Αν $h(x) = (g \circ f)(x)$ τότε:

- B1.** Να δείξετε ότι $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ με $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. 4 μονάδες
- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)$ ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής. 5 μονάδες
- B3.** Να δείξετε ότι η C_h έχει ακριβώς δυο ασύμπτωτες. 5 μονάδες
- B4.** Να σχεδιάσετε τη C_h . 5 μονάδες
- B5.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $I_1 = \int_1^{\sqrt{5}} 2x^3 h(x) dx$, $I_2 = \int_0^1 e^x f(x) dx$ 6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

- Γ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$. 4 μονάδες
- Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f'(f(x) + 2x - 2) = -2$. 5 μονάδες
- Γ3. Αν $0 < \alpha \neq 1$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f'(2\alpha) - f'(\alpha)}{x-1} + \frac{f(\alpha) + 2\alpha - 3}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$. 5 μονάδες
- Γ4. Να δείξετε ότι $f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$ και στη συνέχεια
- i) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$. 5 μονάδες
- ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (x+1)f(x) - xf(x+1) - x + 2$, $x > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. 3 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & x < 1 \\ \frac{\ln x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

- Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$. 4 μονάδες
- Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τοπικά ακρότατα να βρείτε το σύνολο τιμών και να αποδείξετε ότι έχει ολικό ελάχιστο αλλά δεν έχει ολικό μέγιστο. 4 μονάδες
- Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{1}{3} - f(x)\right) = -\frac{1}{4}$ έχει ακριβώς δυο πραγματικές ρίζες. 5 μονάδες
- Δ4. i) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, 0)$. 4 μονάδες
- ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^2 |f(x) - x + 1| dx$. 4 μονάδες
- Δ5. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{f(x) - x + 1}$. 4 μονάδες