

Επώνυμο: _____

Όνομα: _____

Τμήμα: _____

Ημερομηνία: 09.03.2024

Θέμα Α

- A1.** Έστω κύκλος $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ και σημείο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου αυτού. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου στο σημείο A έχει εξίσωση $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$. 8 μονάδες
- A2.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$. Πότε παριστάνει κύκλο και να γραφεί το κέντρο και η ακτίνα στην περίπτωση αυτή. 7 μονάδες
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i) Το σημείο $(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό θ . Σ Λ
- ii) Οι κύκλοι $C_1: 2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y - 2 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι. Σ Λ
- iii) Τα σημεία $(-2, 2)$ και $(4, 2)$ είναι αντιδιαμετρικά στον κύκλο με εξίσωση $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Σ Λ
- iv) Δύο κύκλοι $(K, \rho_1), (\Lambda, \rho_2)$ εφάπτονται εσωτερικά αν και μόνο αν $(K\Lambda) = \rho_1 + \rho_2$ Σ Λ
- v) Η εξίσωση $x^2 + y^2 = \lambda^2$, παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. Σ Λ
- 10 μονάδες**

Θέμα Β

Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$.

- B1.** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C . 4 μονάδες
- B2.** Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του A . 5 μονάδες
- B3.** Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $P(10, -5)$. 5 μονάδες
- B4.** Έστω $B\Gamma$ η χορδή του κύκλου C που έχει μέσο το σημείο $M(-2, 4)$.
Να βρείτε:
- i) την εξίσωση της $B\Gamma$, 5 μονάδες
- ii) τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ . 6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνονται οι εξισώσεις $C_1 : x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ ① και $C_2 : x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0$ ②

- Γ1.** Να δείξετε ότι οι ① και ② είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(5,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα. 6 μονάδες
- Γ2.** **i)** Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ). 4 μονάδες
ii) Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου C_1 . 5 μονάδες
- Γ3.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου C_1 και εφάπτονται στον κύκλο C_2 . 6 μονάδες
- Γ4.** Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων των δύο κύκλων. 4 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + (4 - 2\lambda)y = 0 \quad \text{①}$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση ① παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να γράψετε ως συνάρτηση του λ το κέντρο και την ακτίνα ρ . 6 μονάδες
- Δ2.** Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την ① βρίσκονται πάνω σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. 4 μονάδες
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση ① διέρχονται από δύο σταθερά σημεία και να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής. 6 μονάδες
- Δ4.** Έστω ότι το κέντρο του κύκλου που παριστάνει η ① βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon : y = -x + 4$.
i) Να βρείτε τη τιμή του λ . 4 μονάδες
ii) Για $\lambda = 3$ να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου $B\Gamma\Theta$ όπου B, Γ τα σημεία που η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο και $\Theta(-4, -4)$. 5 μονάδες