

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γ' Λυκείου



Επώνυμο:

Όνομα:

Τμήμα:

Ημερομηνία: 09.09.2023

Θέμα Α

- A1. α) Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$; 4 μονάδες
- β) Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1»; 4 μονάδες
- γ) Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; 3 μονάδες
- A2. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:
«Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , αν ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε ισχύει $f \circ g = g \circ f$ ».
- α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ). 4 μονάδες
- β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) με κατάλληλο παράδειγμα.
- A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Σ Λ
- ii) Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1" τότε για κάθε στοιχείο y του σύνολο τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση ως προς x . Σ Λ
- iii) Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$ αντιστρέψιμη τότε ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A$. Σ Λ
- iv) Για δυο συναρτήσεις f, g για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε δεν είναι υποχρεωτικά $f \circ g = g \circ f$. Σ Λ
- v) Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$. Σ Λ
- 10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ και $g(x) = \ln x$.

- B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = g \circ f$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση φ είναι ίση με τη συνάρτηση $h(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$. 9 μονάδες
- B2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. 8 μονάδες

- B3.** Αν $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}, x \neq 1$, να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} έχουν κοινά σημεία.

8 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + 3e^{f(x)} = x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».

4 μονάδες

Γ2. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f και να βρείτε την μονοτονία της αντίστροφης.

6 μονάδες

Γ3. Αν $f^{-1}(x) = 3e^x + x - 3, x \in \mathbb{R}$, τότε:

i) Να βρείτε τα διαστήματα όπου η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x$.

5 μονάδες

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0$ με $x \in (0, \pi)$.

5 μονάδες

iii) Να λυθεί η ανίσωση $f(\ln(e^x + x - 1) + 3e - 3) \leq 1, x > 0$.

5 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(e^x) = x - \frac{1}{e^x} + 1, x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1, x > 0$.

5 μονάδες

Δ2. Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της f .

5 μονάδες

Δ3. Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} < e^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}$.

5 μονάδες

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση με $f(x) + f(x^5) = f(x^3) + f(x^7), x > 0$.

4 μονάδες

Δ5. Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 \ln x + x^2 < 1, x > 0$.

6 μονάδες