Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

Επώνυμο:
Όνομα:
Τμήμα:
Ημερομηνία: 13.01.2024

Θέμα Α

Α1. **α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x, \alpha>0$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\alpha^x \ell n\alpha$.

5 μονάδες

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. **5 μονάδες**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathrm{R}_1=\mathbb{R}-\{x \mid \sigma\upsilon\nu x=0\}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Σ ☐ Λ ☐

ii) Αν f,g παραγωγίσιμες στο x_0 με $g(x_0)\neq 0$ τότε $\dfrac{f}{g}$ παραγωγίσιμη στο x_0 με $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f(x_0)\cdot g'(x_0)-f'(x_0)\cdot g(x_0)}{g^2(x_0)}$. Σ ☐ Λ ☐

iii) Αν f,g παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Σ ☐ Λ ☐

iv) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Σ ☐ Λ ☐

v) Η συνάρτηση $f(x)=\ell n|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$. Σ ☐ Λ ☐

10 μονάδες

Θέμα Β

Β1. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2\cdot\sqrt{1+x^2}$

β) $f(x)=2^{5-2x}$

γ) $f(x)=\ell n^2\left(\dfrac{1}{1+x^4}\right)$

δ) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x$

12 μονάδες

Β2. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x-2, & x<1 \\ \beta x^3+(\alpha-1)x-1, & x\geq 1 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-1,-3)$.

i) Να βρείτε τις τιμές των α και β. **3 μονάδες**

Αν $\alpha=2$ και $\beta=1$ τότε

ii) Να βρείτε την παράγωγο της f και την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$. **4 μονάδες**

iii) Να βρείτε όλες τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\eta): y = 4x - 2024$. **3 μονάδες**

iv) Να βρείτε το $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}$. **3 μονάδες**

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, 0<x\le\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$ με $\alpha<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. **6 μονάδες**

Γ2. **α)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$. **3 μονάδες**

β) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$. **4 μονάδες**

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. **6 μονάδες**

Γ4. Για $\alpha=-4$ να δείξετε ότι η C_f και η ευθεία $y=2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείομε τεμημένη x_0,η οποία ανήκει στο διάστημα $(-2,0)$. **6 μονάδες**

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=-x^2$ και $g(x)=\ell nx$.

Δ1. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που άγονται από το σημείο $A(1,0)$. **4 μονάδες**

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f μειώνεται με σταθερό ρυθμό. **2 μονάδες**

β) Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της g και τη χρονική στιγμή t_0 που περνά από το $A(1,0)$ η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό $2cm/\sec$. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ℓ του M από την αρχή των αξόνων. **5 μονάδες**

Δ3. Δίνεται επιπλέον συνάρτηση $h(x)=\ell n(-2x)+x^2+1,\ x<0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της h. **4 μονάδες**

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα και στη συνέχεια ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη. **5 μονάδες**

γ) Δικαιολογήστε ότι υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in(-\infty,0)$ τέτοια ώστε $h(x_1)=2$, $h(x_2)=-4$, $h(x_3)=-5$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει $\xi\in(-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $\kappa''(\xi)=0$ όπου $\kappa(x)=(h(x)-2)(h(x)+4)(h(x)+5)+1$. **5 μονάδες**