

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Επώνυμο: _____

Όνομα: _____

Τμήμα: _____

Ημερομηνία: 17.02.2024



Θέμα Α

- A1.** Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ .
Αν • f συνεχής στο Δ
• $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ . 6 μονάδες
- A2.** Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f . 3 μονάδες
- A3.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε η f' είναι θετική στο Δ ».
- α)** Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή. 2 μονάδες
- β)** Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας δίνοντας κατάλληλο παράδειγμα. 4 μονάδες
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i)** Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = 0$ τότε η f είναι σταθερή στο \mathbb{R}^* . Σ Λ
- ii)** Το μικρότερο τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f είναι ολικό ελάχιστο της f . Σ Λ
- iii)** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο η f είναι συνεχής. Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο της f . Σ Λ
- iv)** Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ που $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f . Σ Λ
- v)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε υπάρχει σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία AB με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$. Σ Λ
- 10 μονάδες**

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & x \leq 1 \\ e^{1-x} + \beta, & x > 1 \end{cases}$ η οποία παρουσιάζει στο

$x_0 = 0$ τοπικό ακρότατο.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 0$.

5 μονάδες

- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. 7 μονάδες
- B3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. 7 μονάδες
- B4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \eta\mu x - x$ έχει λύση στο $(0, +\infty)$. 6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$. Όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

- Γ1.** Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $\alpha = e$. 6 μονάδες
- Γ2.** Για $\alpha = e$
- α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. 4 μονάδες
- β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. 5 μονάδες
- γ)** Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$. 5 μονάδες
- δ)** Να δείξετε ότι $f'(e^x) > f'\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$, για κάθε $x > 0$. 5 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ τέτοια ώστε $xf'(x) - xe^{x-1} + 1 = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (Δίνεται ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)

- Δ1.** Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ 6 μονάδες
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. 5 μονάδες
- Δ3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$ έχει δύο θετικές ρίζες x_1, x_2 . 5 μονάδες
- Δ4.** Αν $x_1 < x_2$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)(1-x_1) = f'(\xi_2)(1-x_2)$. 5 μονάδες
- Δ5.** Να λυθεί η εξίσωση $e^{x-1} - \ln x + (x-1)^2 = 1$, $x \in (0, +\infty)$. 4 μονάδες