Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

Επώνυμο:
Όνομα:
Τμήμα:
Ημερομηνία: 18.11.2023

Θέμα Α

Α1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$:

$$f(\alpha)\neq f(\beta)$$

Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε αριθμό **η** μεταξύ $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\eta$.

6 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. **5 μονάδες**

Α3. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής σ'ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ **4 μονάδες**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$. **Σ** ☐ **Λ** ☐

ii) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta)$ τότε η f παίρνει υποχρεωτικά μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή. **Σ** ☐ **Λ** ☐

iii) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. **Σ** ☐ **Λ** ☐

iv) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το $[\mu,\mathrm{M}]$ όπου μ η ελάχιστη τιμή και Μ η μέγιστη τιμή. **Σ** ☐ **Λ** ☐

v) Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A}=(\alpha,\beta)$ τότε $f(\mathrm{A})=(\gamma,\delta)$ όπου $\gamma=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)$, $\delta=\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)$. **Σ** ☐ **Λ** ☐

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x-x+\lambda & ,x\in\left(-\infty,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \eta\mu x-x+1 & ,x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\\ 2x+\kappa & ,x\in[\pi,+\infty)\end{cases}$ $,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

Αν f συνεχής στο πεδίο ορισμού της ,τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=1-3\pi$ και $\lambda=2$ **6 μονάδες**

Β2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

9 μονάδες

Β3. Αν x_0 το σημείο του παραπάνω ερωτήματος να βρείτε το $\lim_{x \to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2} + \eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)$.

6 μονάδες

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \to +\infty}\left(\ln(e^{f(x)}+1) - f(x)\right)$

4 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει ότι $x \cdot f(x) + 1 = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε το $f(0)$ και στη συνέχεια τον τύπο της f.

6 μονάδες

Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Γ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ σ'ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, \pi)$.

5 μονάδες

Γ3. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **ii)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)}$ **iii)** $\lim_{x \to +\infty}\left(e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot \eta\mu x\right)$

9 μονάδες

Γ4. Δίνεται επιπλέον συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x) \cdot f(x) \geq 2023$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

5 μονάδες

Θέμα Δ

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:(0,1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f^2(x) - 2f(x)\ln x = 1 - x - (\ln x)^2$, για κάθε $x \in (0,1]$
- $\lim_{x \to -\infty}\left[\left(f\left(\frac{1}{e}\right) + 1\right)x^3 + 5x - 2016\right] = +\infty$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, $x \in (0,1]$.

6 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-\infty, 0]$.

5 μονάδες

Δ3. Να εξετασθεί αν υπάρχει τιμή του λ ώστε η εξίσωση $f\left(x\right)=e^{\lambda^2}-1,\ \lambda\in\mathbb{R}$ να έχει ρίζα .

5 μονάδες

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f^{-1}\left(\beta\right)}{x-1}-\dfrac{f\left(\eta\mu\alpha\right)-f\left(\alpha\right)}{x-2}=2023$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(1,2\right)$ για κάθε $a\in(0,1)\,,\beta<0$.

6 μονάδες

Δ5. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f^{-1}\left(x\right)\cdot e^{\frac{x^2-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}}\right]$.

3 μονάδες