

Επώνυμο:

Όνομα:

Τμήμα:

Ημερομηνία: 27.04.2024

Θέμα Α

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln(1-x)$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x$.

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0)$ και τύπο:

$$(f \circ g)(x) = \ln(1 - e^x).$$

Έστω $h(x) = (f \circ g)(x)$.

A2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και ότι $h^{-1} = h$.

A3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu h(x)}{h(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)\eta\mu x}{x^2}$

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

B1. Να μελετήσετε την συνάρτηση h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

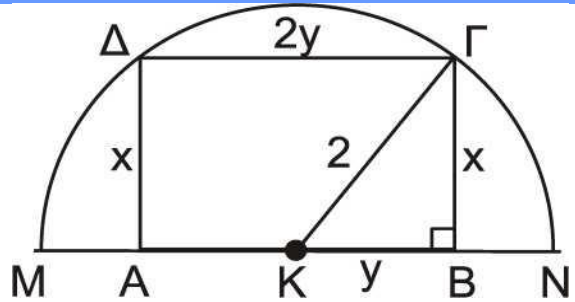
B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_h και στη συνέχεια να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της h .

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_h , του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x = e$.

Θέμα Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο K και διάμετρο $MN = 4$ cm. Ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις x cm και $2y$ cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ως συνάρτηση του x , είναι $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$, $x \in (0, 2)$.

Γ2. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ να είναι ίσο με $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (E(x) - 2\sqrt{3})e^x, x \in (0, 2)$$

έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Θέμα Δ

Δ1. Να δειχθεί ότι $x^2 - x \geq \ln x$, για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Δίνεται η συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & x < \alpha \\ xe^x, & x \geq \alpha \end{cases}$, όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός ($\alpha > 0$).

Δ2. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής.

Δ4. Να βρεθούν τα ακρότατα της f .

Δ5. i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii) Να βρεθεί η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A(1, f(1))$. Να βρεθεί το εμβαδόν του

χωρίου που περικλείεται από τη C_f , εφαπτομένη (ε) και την ευθεία $x = 2$.

Δ6. Να δείξετε ότι $\int_0^1 \sin x f(x) dx > e(\eta\mu 1 + 2\sigma\nu 1 - 2)$.