Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου

Επώνυμο:

Όνομα:

Τμήμα:

Ημερομηνία: 18.11.2023

Θέμα Α

Α1. Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $M(x, y)$ μέσο του ΑΒ να αποδείξετε ότι $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

6 μονάδες

Α2. Αν $\lambda\vec{\alpha}$, $\lambda\vec{\beta}$ οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha} \cdot \lambda\vec{\beta} = -1$.

6 μονάδες

Α3. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

3 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ **Σ** ☐ **Λ** ☐

ii) $\vec{i} \cdot \vec{j} + \vec{i}^{\,2} = 1$ όπου $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων. **Σ** ☐ **Λ** ☐

iii) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα , τότε $0^\circ \leq \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) < 180^\circ$. **Σ** ☐ **Λ** ☐

iv) Αν για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) \neq 0$ τότε τα σημεία είναι κορυφές τριγώνου. **Σ** ☐ **Λ** ☐

v) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$ τότε η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$ είναι οξεία. **Σ** ☐ **Λ** ☐

10 μονάδες

Θέμα Β

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Β1. Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

5 μονάδες

Β2. Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

7 μονάδες

Β3. Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$.

8 μονάδες

Β4. Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}}\right)$.

5 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνονται σημεία $A(0,-1)$, $B(\lambda,1)$, $\Gamma(\lambda-2,\lambda-3)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε:

i) τα σημεία Α, Β, Γ να είναι κορυφές τριγώνου, **5 μονάδες**

ii) το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $A=90^\circ$. **3 μονάδες**

Γ2. Για $\lambda=-2$, να βρείτε:

i) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, **3 μονάδες**

ii) το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, **5 μονάδες**

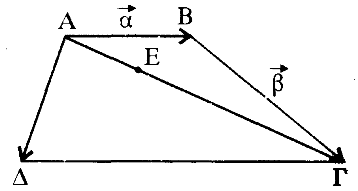
iii) να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ με τον $x'x$, **4 μονάδες**

iv) να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u}=(0,8)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$. **5 μονάδες**

Θέμα Δ

Δίνεται το τραπέζιο στο διπλανό σχήμα.

Αν $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=-3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{E\Gamma}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$.



Δ1. Να εκφράσετε με τη βοήθεια των $\vec{\alpha}$ και τα $\vec{\beta}$ διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{A\Delta}$. **6 μονάδες**

Δ2. Να δείξετε ότι τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά. **5 μονάδες**

Δ3. Να αποδειχθεί ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του επιπέδου, το διάνυσμα $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό. **5 μονάδες**

Δ4. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{3}$ να βρείτε:

i) το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. **5 μονάδες**

ii) τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$. **4 μονάδες**