

Θέματα Διαγωνίσματος

21 Σεπτεμβρίου 2024

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Θέμα Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. 3 μονάδες
- A2. α)** Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$; 3 μονάδες
- β)** Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1»; 3 μονάδες
- γ)** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; 3 μονάδες
- A3.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:
 «Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , αν ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε ισχύει $f \circ g = g \circ f$ ».
- α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ). 3 μονάδες
- β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) με κατάλληλο παράδειγμα. 3 μονάδες
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i)** Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι γνησίως μονότονη τότε δεν είναι «1-1». Σ Λ
- ii)** Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1» τότε για κάθε στοιχείο y του σύνολο τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση ως προς x . Σ Λ
- iii)** Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$ αντιστρέψιμη τότε ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in f(A)$. Σ Λ
- iv)** Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες τότε δεν είναι «1-1». Σ Λ
- v)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον $x'x$. Σ Λ
- 10 μονάδες**

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(1+x) - \ln x$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x$ και $\varphi(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$.

- B1.** Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και φ είναι ίσες. Αν είναι $f \neq \varphi$, να βρείτε το «ευρύτερο» υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο είναι $f = \varphi$. 6 μονάδες

Θέματα Διαγωνίσματος

21 Σεπτεμβρίου 2024

- B2.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ και να δείξετε ότι $h(x) = \ln(1 + e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$. 7 μονάδες
- B3.** Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και να λύσετε την ανίσωση $h\left(\frac{1}{\ln 2} h(x)\right) < \ln(1 + e^{-1})$. 6 μονάδες
- B4.** Να δικαιολογήσετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε τη h^{-1} . 6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^{\alpha-1} + \alpha - 1, & x \leq 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

- Γ1.** Αν η συνάρτηση f έχει όριο στο $x_0 = 0$ να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$. 6 μονάδες
- Για $\alpha = 1$.
- Γ2.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να δείξετε ότι η f δεν είναι «1-1». 6 μονάδες
- Γ3.** Να λύσετε την ανίσωση $f(x^4 + 1) < f(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. 6 μονάδες
- Γ4.** Αν $f(x) = x^2 + 1$, $x \leq 0$ τότε να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της. 7 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x + x - 1$.

- Δ1.** Να δείξετε ότι η g είναι «1-1». 3 μονάδες
- Δ2.**
 i) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης g . 4 μονάδες
 ii) Να λύσετε την εξίσωση $g^{-1}(g(x^2 - 3) - e) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. 4 μονάδες
- Δ3.** Αν για την $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g(f(x^3 + 1)) - e^x + 1 = x$ για κάθε $x \geq 0$.
 i) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. 5 μονάδες
 ii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} . 5 μονάδες
 iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - 2x}{f^{-1}(x) - 2}$. 4 μονάδες