

Θέματα Διαγωνίσματος

2 Νοεμβρίου 2024

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Θέμα Α

- A1.** i) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. 5 μονάδες
 ii) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; 5 μονάδες
- A2.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:
 «Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ισχύει ό: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ ».
- a) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως **Αληθή** ή **Ψευδή**. 1 μονάδες
 β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) με κατάλληλο παράδειγμα. 4 μονάδες
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$. Σ Λ
- ii) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Σ Λ
- iii) Αν για την συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Σ Λ
- iv) Υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}$. Σ Λ
- v) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Σ Λ
- 10 μονάδες**

Θέμα Β

- B1.**
- a) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha - 1)x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}, & x < 1 \\ \frac{3x^2 - 10x + 8}{x - 3}, & x \in [1, 3) \end{cases}$.
- Αν το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός
- i) Να βρείτε την τιμή του α .
 Αν $\alpha = 1$ τότε
- ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- iii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. 9 μονάδες

Θέματα Διαγωνίσματος

2 Νοεμβρίου 2024

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\eta\mu^2 x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x-10}{x-\eta\mu x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x+3} \eta\mu \frac{1}{x}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2}{x+\eta\mu x}}$

10 μονάδες

B2.

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1} = 6$.

Να βρείτε:

α) την τιμή $f(0)$

β) το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

γ) το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x)-\eta\mu x}{6x-\eta\mu 3x}$

6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x^3}, x < 0 \\ x^2 - \kappa x, 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2 - \lambda x + \mu}{x-2}, x > 2 \end{cases}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-x}{x-2} = 2$.

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

3 μονάδες

Γ2. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ, μ .

6 μονάδες

Αν $\kappa=1, \lambda=2, \mu=0$.

Γ3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$.

6 μονάδες

Γ4. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4 μονάδες

Γ5. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^4(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu f(x)} \right)$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \eta\mu f(x))$

6 μονάδες

Θέματα Διαγωνίσματος

2 Νοεμβρίου 2024

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)^2 - 2$, $x \geq 3$ και συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $g(x) - (e^x - 2^x)f(x) \geq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της f^{-1} . **6 μονάδες**

Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2} + 3$, $x \geq -2$.

Δ2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. **3 μονάδες**

Δ3. Δίνεται επιπλέον συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & x \geq -2 \\ \sqrt{x^2+1} + \alpha x + \beta, & x < -2 \end{cases}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$. **5 μονάδες**

ii) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(-x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} h\left(\frac{1}{x} - 2\right)$. **6 μονάδες**

Δ4. Δίνεται συνάρτηση $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x) + \kappa^2(x) \leq x^4 + 2x^2 + 1 + 2f(x)\kappa(x)$ για κάθε $x \geq 3$.

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa(x)}{x^4}$. **5 μονάδες**