Θέματα Διαγωνίσματος

7 Δεκεμβρίου 2024

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο x_0.

4 μονάδες

Α2. **i)** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

4 μονάδες

ii) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

3 μονάδες

iii) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

4 μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και η συνάρτηση $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0. **Σ** ☐ **Λ** ☐

ii) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές. **Σ** ☐ **Λ** ☐

iii) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα. **Σ** ☐ **Λ** ☐

iv) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο (α,β). **Σ** ☐ **Λ** ☐

v) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. **Σ** ☐ **Λ** ☐

10 μονάδες

Θέμα Β

Β1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3+x+\alpha, x<0 \\ x^2+\alpha x+\beta, x\geq 0\end{cases}$.

Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές των α, β.

6 μονάδες

Β2. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu 3x}{x^2-x}=2$.

α) Να βρείτε το $f(0)$.

5 μονάδες

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε το $f'(0)$. **5 μονάδες**

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\eta\mu x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$. **4 μονάδες**

δ) Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda f^2(x)}{2x^2+f^2(x)}=3$. **5 μονάδες**

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ell n(1-x)$.

Γ1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f. **5 μονάδες**

Γ2. Να δεχθεί ότι η είναι «1-1» και να ορίσετε την f^{-1}. **4 μονάδες**

Γ3. Αν $f^{-1}(x)=1-e^x, x\in\mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f^{-1} και $h(x)=1-\frac{1}{x}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο με θετική τετμημένη. **5 μονάδες**

Γ4. Αν $\alpha\in(0,1)$ και $\beta<0$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1}-\frac{f(\beta)}{x-2}=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$. **5 μονάδες**

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}$. **3 μονάδες**

Γ6. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{f(x)}-2^{f(x)}}{e^{f(x)}+2^{f(x)}}$. **3 μονάδες**

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^2(x)+x^2=e^{2x}+2xf(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ με $f(0)=1$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$. **4 μονάδες**

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\cdot \varepsilon\varphi x-1\right)-1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

4 μονάδες

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g\left(x\right)=\begin{cases} f\left(x\right), x<0 \\ 1-x^3-\ell n\left(x+1\right), x\geq 0 \end{cases}$.

Δ3. **i)** Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής συνάρτηση.

4 μονάδες

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g και να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{g\left(x\right)-1}+\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$.

6 μονάδες

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g\left(x\right)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<x_2$ και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_2}\left[\dfrac{\eta\mu\left(x-x_2\right)}{\left(x_2-x\right)^3}\cdot \ell n\left(\dfrac{x+2005}{x+2004}\right)\right]$.

4 μονάδες

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση $g\left(x^4+x^2\right)<1, x\in\mathbb{R}$.

3 μονάδες