

Θέματα Διαγωνίσματος

14 Σεπτεμβρίου 2025

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Θέμα Α

- A1.** α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A υποσύνολο του $\mathbb{R}$. 3 μονάδες
 β) Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1-1»; 4 μονάδες
 γ) Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$. 4 μονάδες
- A2.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:
 «Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g , αν ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε ισχύει $f \circ g = g \circ f$ ».
 α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ).
 β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) με κατάλληλο παράδειγμα. 4 μονάδες
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i) Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι γνησίως μονότονη τότε δεν είναι «1-1». Σ ☐ Λ ☐
- ii) Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$ αντιστρέψιμη τότε ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in f(A)$. Σ ☐ Λ ☐
- iii) Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$. Σ ☐ Λ ☐
- iv) Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1» τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Σ ☐ Λ ☐
- v) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον $x'x$. Σ ☐ Λ ☐
- 10 μονάδες**

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = (x + \alpha)^2 - 1, x \geq -1, \alpha > 0$
- $g(x) = x^2 - 1$

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$.

- B1.** Να δείξετε ότι $\alpha = 1$. 3 μονάδες
- B2.** Να δείξετε ότι f αντιστρέφεται, να βρείτε την αντίστροφή της. 5 μονάδες

Θέματα Διαγωνίσματος

14 Σεπτεμβρίου 2025

Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1, x \geq -1$.

- B3.** Να βρείτε σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} 6 μονάδες
- B4.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} . 5 μονάδες
- B5.** Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$. 6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

και $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

- Γ1.** Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$. 6 μονάδες

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1 \text{ και } r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$$

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f . 7 μονάδες
- Γ3.** Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$ 6 μονάδες
- Γ4.** Να λυθεί η εξίσωση $f\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2\right) + 1\right) = 2, x \in \mathbb{R}$. 6 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + e^{f(x)} - x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη της. 5 μονάδες
- Δίνεται επιπλέον συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(g(\ln x) + \ln x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ για κάθε $x > 0$.

Θέματα Διαγωνίσματος

14 Σεπτεμβρίου 2025

- Δ2. Να δείξετε ότι $g(x) = e^{-x} - x$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y=1$ 5 μονάδες
- Δ3. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 2x \leq e^{1-x^2} - e^{1-2x}$, $x \in \mathbb{R}$. 5 μονάδες
- Δ4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
- i) $g^3(x) + 2g(x) = x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ 5 μονάδες
- ii) $g(x) - g(x^2) = 1 - e^{x-1}$, $x > 0$ 5 μονάδες



Φροντιστήριο ΦΑΣΜΑ. Δείτε τη διαφορά!