

# Θέματα Διαγωνίσματος

19 Οκτωβρίου 2025

## Μαθηματικά Γ' Λυκείου

### Θέμα Α

- A1.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. 4 μονάδες
- A2.** Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ .  
Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ . 6 μονάδες
- A3.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:  
«Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x)) = 0$ ».  
**α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ). 1 μονάδες  
**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α) με κατάλληλο παράδειγμα. 4 μονάδες
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$ . Σ ☐ Λ ☐
- ii)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Σ ☐ Λ ☐
- iii)** Υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ . Σ ☐ Λ ☐
- iv)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  κοντά στο  $x_0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ . Σ ☐ Λ ☐
- v)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|\eta \mu x| < |x|$ . Σ ☐ Λ ☐
- 10 μονάδες**

### Θέμα Β

- B1.** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση τέτοια ώστε  $3x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 3x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε
- i)** Να υπολογίσετε το  $f(0)$
- ii)** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$
- iii)** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + x^2}{xf(x) + \eta \mu^2 x}$ . 9 μονάδες

# Θέματα Διαγωνίσματος

19 Οκτωβρίου 2025

**B2.** Δίνεται συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \eta\mu x}{\sqrt{x+1} - 1} = 6$ .

Να βρείτε τα όρια:

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$       **β)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

8 μονάδες

**B3.** Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = \frac{x+1}{x-3}$ .

Να υπολογισθούν τα όρια:

**α)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(e^x)$       **β)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(\ln x)$       **γ)**  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(h(x))$       **δ)**  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(h(x))$

8 μονάδες

## Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύουν:

$$(f \circ g)(x) = e^x + 3 \text{ και } g(x) = \frac{x}{2}$$

**Γ1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = e^{2x} + 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

4 μονάδες

**Γ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση:  $f(1-x^3) < 4$ .

4 μονάδες

**Γ3.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

5 μονάδες

Αν  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(x-3), x > 3$ , τότε:

**Γ4.** Να υπολογίσετε τα όρια:

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4g(x) - 5}{2f^{-1}(x)}$       **β)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(-x)}$

**γ)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \eta\mu x)$       **δ)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f^2(x) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} \right)$

12 μονάδες

## Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = (x-1)^2 + 1, x \in [1, +\infty)$  και  $g(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της  $f^{-1}$ .

5 μονάδες

Αν  $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1, x \in [1, +\infty)$ , τότε:

# Θέματα Διαγωνίσματος

19 Οκτωβρίου 2025

Δ2. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1} \circ g$ .

4 μονάδες

Δ3. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x)-1}{(f^{-1} \circ g)(x)-2}$  όπου  $(f^{-1} \circ g)(x) = |x|+1, x \in \mathbb{R}$ .

5 μονάδες

Δ4. Δίνεται επιπλέον συνάρτηση  $h(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & x \geq 1 \\ \sqrt{x^2+1} + \alpha x + \beta, & x < 1 \end{cases}$

Αν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2$ .

α) Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

5 μονάδες

β) Αν  $\alpha = 1$  και  $\beta = 2$  να υπολογίσετε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(-x)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h\left(\frac{1}{x}+1\right)$

6 μονάδες

