

Θέματα Διαγωνίσματος

23 Νοεμβρίου 2025

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Θέμα Α

A1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$:

$$f(\alpha) \neq f(\beta)$$

Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε αριθμό η μεταξύ $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

6 μονάδες

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

6 μονάδες

A3. Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

3 μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο (α, β) .

Σ ☐ Λ ☐

ii) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει υποχρεωτικά μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

Σ ☐ Λ ☐

iii) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Σ ☐ Λ ☐

iv) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το $[\mu, M]$ όπου μ η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή.

Σ ☐ Λ ☐

v) Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (\alpha, \beta)$ τότε $f(A) = (\gamma, \delta)$ όπου $\gamma = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$, $\delta = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

Σ ☐ Λ ☐

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x^3 - \alpha, & x < 0 \\ e^x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

4 μονάδες

B2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \sin x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

6 μονάδες

Θέματα Διαγωνίσματος

23 Νοεμβρίου 2025

B3. Εστω συνάρτηση $h(x) = f(x) + \ln x, x > 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει

μοναδική ρίζα ρ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{1}{(x - \rho)h(x)}$.

7 μονάδες

B4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με

$g(x) = \frac{1}{x} - 1, x \neq 0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

8 μονάδες

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε:

- $f^2(x) + \sin^2 x = 1$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Γ1. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

6 μονάδες

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της f .

4 μονάδες

$$\text{Αν } f(x) = |\eta \mu x|, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

5 μονάδες

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{9}\right)$: $f(x_0) = \frac{2f\left(\frac{\pi}{10}\right) + 3f\left(\frac{\pi}{11}\right)}{5}$.

6 μονάδες

Γ5. Αν $M_0(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει στη C_f , να βρείτε τον τύπο $d(x) = (M_0 M)$ της απόστασης του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από το σημείο $M(x, f(x))$ της C_f για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και στη συνέχεια

4 μονάδες

Θέματα Διαγωνίσματος

23 Νοεμβρίου 2025

ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - x - 2, & x \leq 1 \\ \ln x + x - 3, & x > 1 \end{cases}$.

- Δ1. α)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. 2 μονάδες
β) Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και $\Delta_2 = (1, +\infty]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f . 5 μονάδες
- Δ2. α)** Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$. 4 μονάδες
β) Αν $f(e^{1-x_1}) = 0$ να δείξετε ότι ισχύει: $1 - x_1 = \ln x_2$. 3 μονάδες
- γ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{\eta \mu x - x}{f(x)}$ 3 μονάδες
- Δ3.** Αν $\alpha, \beta \neq 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(\alpha)+2}{x-1} + \frac{f(\beta)+2}{x-2} = 2025$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$. 5 μονάδες
- Δ4.** Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(f(x) - e^\lambda + 4) = -2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$. 3 μονάδες