

Θέματα Διαγωνίσματος

11 Ιανουαρίου 2026

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Θέμα Α

- A1.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο x_0 . 6 μονάδες
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; 3 μονάδες
- A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. 6 μονάδες
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Σ ☐ Λ ☐
- ii) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 . Σ ☐ Λ ☐
- iii) Για κάθε $x < 0$ ισχύει $(\ln|x|)' = -\frac{1}{x}$. Σ ☐ Λ ☐
- iv) Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 , δηλαδή είναι $u(t_0) = S'(t_0)$. Σ ☐ Λ ☐
- v) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για όλα και $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Σ ☐ Λ ☐
- 10 μονάδες**

Θέμα Β

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & x \leq 1 \\ 3 - 2\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.
- B1.** Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. 7 μονάδες
- Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 3$ τότε:
- B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ και να εξετάσετε αν η (ε) έχει και δεύτερο κοινό σημείο με την C_f εκτός από το Α. 6 μονάδες

Θέματα Διαγωνίσματος

11 Ιανουαρίου 2026

- B3.** Να βρείτε την συνάρτηση f' και να εξετάσετε αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. 7 μονάδες
- B4.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-3h)}{h}$. 5 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - \kappa)^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = (x - 1)^{\lambda x}$, $x > 1$, $\lambda > 0$ τέτοιες ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$.

- Γ1.** Να δείξετε ότι $\kappa = \lambda = 1$. 6 μονάδες
- Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω κοινής εφαπτομένης. 5 μονάδες
- Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^x - 1}{x-2}$. 3 μονάδες
- Γ4. α)** Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο $[0, 3]$. 4 μονάδες
- β)** Να βρείτε το μοναδικό $\xi \in (0, 3)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.
- Γ5.** Ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ κινείται στη C_f και η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο αυτό τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\Lambda(O, \gamma)$. Αν η τετμημένη $\alpha(t)$ του σημείου M μεταβάλλεται με ρυθμό 0,5cm/sec να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη του Λ την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η τετμημένη του M είναι ίση με 3cm. 7 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η **πολυωνυμική συνάρτηση** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = f(-\alpha)$, $\alpha \neq 0$ και η συνάρτηση $h(x) = e^{-\kappa x^2} \cdot f(x)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\kappa\xi f(\xi)$. 5 μονάδες
- Δ2.** Αν επιπλέον $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x + 1} = 2$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, 2)$ είναι κάθετη στην ευθεία $n: y = -\frac{1}{4}x + 2$, να βρείτε τον τύπο της f . 5 μονάδες

Θέματα Διαγωνίσματος

11 Ιανουαρίου 2026

Αν $f(x) = 2x^2, x \in \mathbb{R}$ τότε:

- Δ3. Σώμα $M(x, y)$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$ κινείται στη C_f και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/sec. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σώμα διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \angle xOM$. 5 μονάδες
- Δ4. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 8x - 8$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$. 4 μονάδες
- β) Δίνεται επιπλέον συνάρτηση $g(x) = e^x$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη. 6 μονάδες

